91415 מתמטיקה למוסמך במינהל עסקים

שאלון בחינה לדוגמה לקראת בחינת הפטור בתאריך נובמבר 2024

פתרון הבחינה לדוגמה

שאלה 1

א.

$$f(x)=3\cdot\ln(x+1)-2\cdot x^2$$

$x=0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=3\ln(1)-2\cdot 0^2=0$

ב.

$$f'(x)=\frac{3}{x+1}-4\cdot x$$

נחפש נקודות שיכולות להיות קיצון ולא מקיימות:

$$f'(x)=0$$

נציב את הנגזרת:

$$\frac{3}{x+1}=4\cdot x$$

$$3=4\cdot x^2+4\cdot x$$

$$4\cdot x^2+4\cdot x-3=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2+4\cdot 4\cdot 3}}{2\cdot 4}=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{8}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{8}=\frac{-4\pm 8}{8}$$

שני פתרונות:

$x_1 = 0.5$

$x_2 = -1.5$

x_2 אינו בתחום הרלוונטי ($x \ge 0$). נישאר עם הפתרון $x_1 = 0.5$.

ערכה של הפונקציה בנקודה הזו :

$$f(x) = 3 \cdot \ln(0.5+1) - 2 \cdot 0.5^2 = 0.716$$

נגזרת שניה :

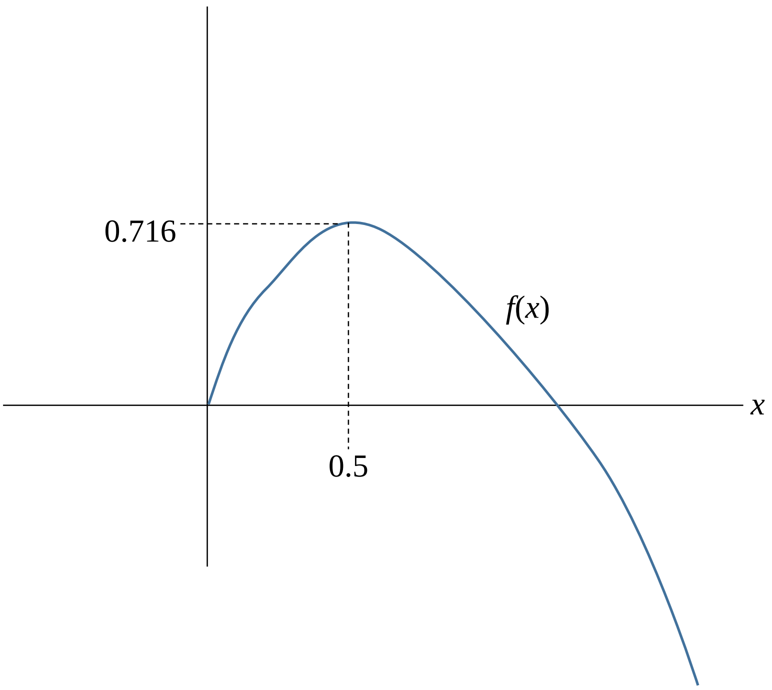
$$f''(x) = \frac{-3}{(x+1)^2} - 4$$

הנגזרת השניה שלילית לכל x כולל בנקודה שמצאנו קודם ולכן הנקודה שמצאנו היא נקודת מקסימום.

כיוון שזו נקודת מקסימום : הפונקציה עולה בתחום $0 \le x < 0.5$ ויורדת בתחום $x > 0.5$.

ג. מכך שהנגזרת השניה שלילית לכל x נובע שהפונקציה קעורה עבור כל x.

ד.



מהירידה בקעירות נובע שיש עוד נקודה שבה הפונקציה מתאפסת (לא רק זו מסעיף א'), ושעבור ערכי x גדולים יותר מאשר בנקודה זו הפונקציה כבר שלילית.

אין צורך בשאלה הזו למצוא את הערך של x בנקודה הזו, וזה גם לא אפשרי מתמטית. עם זאת יש צורך, כחלק מפיתרון מלא, להראות שיש נקודה כזו שממנה והלאה הפונקציה שלילית.

ה. לאור החקירה בסעיפים הקודמים, נקודת המקסימום שנמצאה היא לא רק מקסימום מקומי אלא גלובלי (מוחלט).

שאלה 2

א.

$$\pi(Q) = 600 \cdot Q - Q^2 - (200 \cdot Q + 1{,}600)$$

$$\pi(Q) = 400 \cdot Q - Q^2 - 1{,}600$$

ב.

$$\pi'(Q) = 400 - 2 \cdot Q$$

ג. נקודת מקסימום צריכה לקיים:

$$\pi'(Q) = 0$$

נציב את הנגזרת ונפתור:

$$400 - 2 \cdot Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 200$$

כדי לודא שהו אכן מקסימום נחשב נגזרת שניה:

$$\pi''(Q) = -2$$

מכיוון שהנגזרת השניה שלילית – זה אכן מקסימום.

ד.

$$\pi(200) = 400 \cdot 200 - 200^2 - 1{,}600 = 38{,}400$$

שאלה 3

א.

$$\pi(x,y) = -3x^2 + 2xy - 5y^2 + 300$$

s.t. $x + y = 10$

הלגרנג'יאן:

$$L = -3\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y - 5\cdot y^2 + 300 - \lambda\cdot(x + y - 10)$$

נגזור את הלגרנגיאן:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -6\cdot x + 2\cdot y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2\cdot x - 10\cdot y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$-6\cdot x + 2\cdot y = \lambda$$

$$2\cdot x - 10\cdot y = \lambda$$

$$-6\cdot x + 2\cdot y = 2\cdot x - 10\cdot y$$

$$12\cdot y = 8\cdot x$$

$$y = \frac{8}{12}\cdot x$$

נציב במשוואה השלישית (האילוץ):

$$x+\frac{8}{12}\cdot x-10=0$$

$$12\cdot x+8\cdot x-120=0$$

$$20\cdot x=120 \quad \Rightarrow \quad x=6$$

$$y=\frac{8}{12}\cdot x=\frac{8}{12}\cdot 6=4$$

הנקודה ($x = 6$, $y = 4$) מקיימת תנאי סדר ראשון למקסימום.

ב. נבדוק שהנקודה שמצאנו מקיימת גם את התנאי מסדר שני:

$$\pi_{xx}(x,y)=-6$$

$$\pi_{yy}(x,y)=-10$$

$$\pi_{xy}(x,y)=2$$

התנאי ההכרחי לכך שזוהי נקודת קיצון הוא:

$$\pi_{xx}(x,y)\cdot\pi_{yy}(x,y)-\left[\pi_{xy}(x,y)\right]^2>0$$

והוא אכן מתקיים, כי:

$$\pi_{xx}(x,y)\cdot\pi_{yy}(x,y)-\left[\pi_{xy}(x,y)\right]^2=(-6)\cdot(-10)-2^2=56$$

התנאי לכך שהקיצון הזה הוא מקסימום הוא שגם $\pi_{xx}(x,y)<0$ וגם $\pi_{yy}(x,y)<0$ וראינו לעיל שגם תנאי זה מתקיים.

לכן זוהי נקודת מקסימום.

ג. בנקודת המקסימום:

$$\pi(6,4)=-3\cdot 6^2+2\cdot 6\cdot 4-5\cdot 4^2+300=160$$

שאלה 4

א.

$$\int_0^2 \frac{6x}{\sqrt{2x^2+1}}\cdot dx$$

נגדיר :

$$y=\sqrt{2x^2+1}$$

נגזור :

$$\frac{dy}{dx}=y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}\cdot 4x=\frac{2x}{y}$$

$$dx=\frac{y}{2\cdot x}dy$$

נתאים את הגבולות של האינטגרל ל- y :

$x=0 \Rightarrow y=1 \qquad x=2 \Rightarrow y=3$

נציב את dx ואת הגבולות המותאמים :

$$\int_0^2 \frac{6x}{\sqrt{2x^2+1}}\cdot dx=\int_1^3 \frac{6x}{y}\cdot\frac{y}{2x}dy = \int_1^3 3\cdot dy = 3\cdot y\Big|_1^3 = 9-3=6$$

ב.

$$f(x)=\frac{6x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$f'(x)=\frac{6\cdot\sqrt{2x^2+1}-6x\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}\cdot 4x}{2x^2+1}=\frac{6\cdot(2x^2+1)-12\cdot x^2}{(2x^2+1)^{1.5}}=\frac{12\cdot x^2+6-12\cdot x^2}{(2x^2+1)^{1.5}}$$

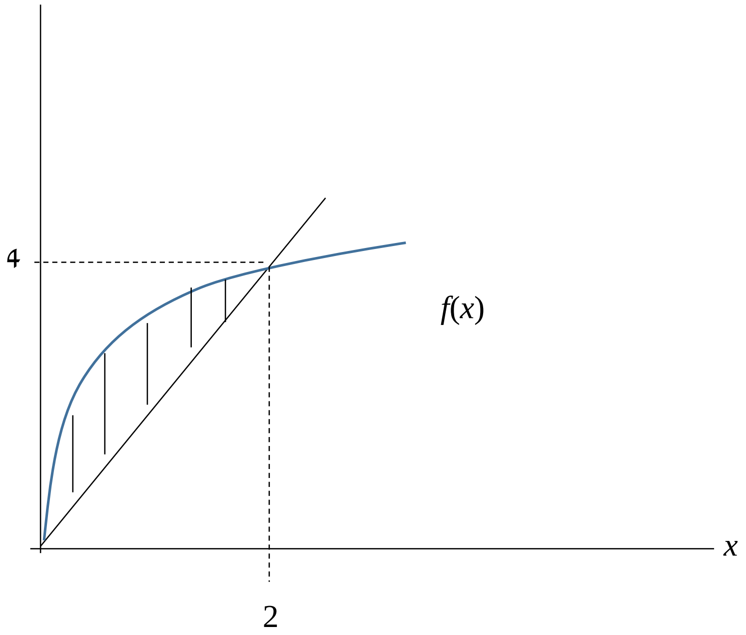
$$=\frac{6}{(2x^2+1)^{1.5}}>0$$

הנגזרת חיובית לכל x. לכן לכל x הפונקציה עולה.

$$f''(x)=6\cdot(-1.5)\cdot(2x^2+1)^{-2.5}\cdot 4x=-\frac{36\cdot x}{(2x^2+1)^{2.5}}<0$$

הפונקציה קעורה לכל x בתחום הרלוונטי.

ג.



הנקודה (2, 4) היא נקודת מפגש לקו ולפונקציה.

ד. את סך השטח מתחת לפונקציה מצאנו בסעיף א'.

השטח מתחת לקו הוא שטח המשולש: $\frac{2\cdot 4}{2}=4$

לכן השטח המבוקש, שבציור הוא מקווקו הוא: $6-4=2$